TIẾP CẬN BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG QUA CÁC BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG 2007 – 2016

Trong các năm vừa qua bài toán Bất Đẳng Thức và Giá Trị Lớn Nhất – Giá Trị Nhỏ Nhất là câu hỏi khó để chinh phục điểm 10 trong đề thi Đại Học – Cao Đẳng và Kì Thi THPT Quốc Gia cũng như trong các kì thi HSG.

Theo xu hướng của các năm gần đây thì việc kiếm điểm của câu hỏi này thực sự không phải là một việc quá khó khăn nếu như các em có kiến thức về bài toán này.

Đối với các em thi Y – Dược , An Ninh, Công An thì việc chinh phục câu hỏi này là điều cần thiết. Chính vì vậy các em phải bắt đầu ngay từ bây giờ, một các nghiêm túc là có lộ trình để có đầy đủ kiến thức nhằm làm tốt bài toán này trong đề thi. Việc hơn kém nhau 0,25-0,5 điểm đã có thể quyết định vấn đề đậu và rớt ở các trường TOP.

Mục tiêu của các em cần đặt ra là học đủ và vận dụng tốt, không nên học quá cao siêu những như quá thừa thãi. Bộ não của các em phải hoạt động để cân bằng ở tất cả các môn để đạt tổng thành tích cao nhất chứ ko phải đạt thành tích cao ở chỉ 1 môn.

Dưới đây là một vài lưu ý của thầy khi bắt đầu học về Bất Đẳng Thức:

Số 1: Biết được và vận dụng được 2 bất đẳng thức chính là bất đẳng thức AM-GM (Cauchy, Cosi) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (Bunyakovski-Cauchy-Schwarz).

Số 2: Nắm rõ được điểm rơi là gì? Sử dụng các đánh giá tương ứng để đảm bảo điểm rơi như thế nào?

Số 3: Biết và vận dụng được các đánh giá thường gặp nhất, các bất đẳng thức phụ quen thuộc.

Số 4: Rèn luyện thường xuyên để quen tay và tạo sự nhạy bén, xử lí tốc độ cao + trình bày rõ ràng chi tiết.

DƯỚI ĐÂY THẦY TẶNG CÁC EM LỜI GIẢI VÀ CÁCH TƯ DUY CỦA CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO.

CHÚC CÁC EM TIẾP CẬN VÀ ĐỊNH HƯỚNG ĐÚNG CHUẨN BỊ CHO KÌ THI 2017!!!

Bài 1: *Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối B-2007

PHÂN TÍCH

Dễ thấy bài toán đối xứng nên điểm rơi là $x = y = z$.

Ta có: $P = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$. Tử số là lượng $x^2+y^2+z^2$ và mẫu số là lượng xyz nên ta có thể đưa về lượng trung gian là $x+y+z$ hoặc $xy+yz+zx$. Để tự nhiên ta chọn lượng $x+y+z$.

Sử dụng các bất đẳng thức: $x^2+y^2+z^2 \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ và $(x+y+z)^3 \ge 27xyz$

BÀI GIẢI

Ta có: $3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (x+y+z)^2$ và $27xyz \le (x+y+z)^3$

$$\Rightarrow P \ge \frac{(x+y+z)^2}{6}+\frac{9(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} = \frac{(x+y+z)^2}{6}+\frac{9}{x+y+z}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{6}+\dfrac{9}{t}$ với $t = x+y+z \Rightarrow t > 0$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{t}{3}-\frac{9}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

BBT:

t	0		3		$+\infty$
f′(t)		$-$	0	$+$	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) \ge f(3) = \dfrac{9}{2} \Rightarrow P \ge \dfrac{9}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z \\ x+y+z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{9}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 2: *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P=\dfrac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\dfrac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\dfrac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

Đề tuyển sinh Đại Học khối A-2007

PHÂN TÍCH

Dự đoán điểm rơi là $x=y=z=1$

Mẫu số chứa tổng của các đại lượng $x\sqrt{x},y\sqrt{y},z\sqrt{z}$ gần như là không biến đổi được nếu có thì: $2x\sqrt{x}\le x(x+1)=x^2+x$ sẽ đưa mẫu về dạng phức tạp hơn.

Ta thấy tử số các phân thức có sự đặc biệt là chứa cả ba biến *x, y, z,* dựa vào điều kiện bài toán ta đánh giá như sau: $x^2(y+z)\ge 2x^2\sqrt{yz}=2x\sqrt{x}$ đến đây ta thấy tử số trở thành đại lượng giống mẫu.

BÀI GIẢI

Cách 1:

Áp dụng AM-GM: $x^2(y+z)\ge 2x^2\sqrt{yz}=2x\sqrt{x}$

Tương tự: $y^2(z+x)\ge 2y\sqrt{y}$, $z^2(x+y)\ge 2z\sqrt{z}$

$$\Rightarrow P\ge \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đặt $a=x\sqrt{x};b=y\sqrt{y};c=z\sqrt{z}\Rightarrow P\ge \dfrac{2a}{b+2c}+\dfrac{2b}{c+2a}+\dfrac{2c}{a+2b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{2a^2}{a(b+2c)}+\frac{2b^2}{b(c+2a)}+\frac{2c^2}{c(a+2b)}\ge 2\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Mà: $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\ge 1$

$$\Rightarrow P\ge \frac{2a}{b+2c}+\frac{2b}{c+2a}+\frac{2c}{a+2b}\ge 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=y=z=1$

Cách 2:

Đặt: $a=x\sqrt{x}+2y\sqrt{y};b=y\sqrt{y}+2z\sqrt{z};c=z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}$

$$\Rightarrow x\sqrt{x}=\frac{4c+a-2b}{9};y\sqrt{y}=\frac{4a+b-2c}{9};z\sqrt{z}=\frac{4b+c-2a}{9}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{9}\left(\frac{4c+a-2b}{b}+\frac{4a+b-2c}{c}+\frac{4b+c-2a}{a}\right)$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{9}\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)-6\right]$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{9}(3+4.3-6)=2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x=y=z=1$

Bài 3: *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$. Chứng minh rằng:* $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\leq 5(y+z)^3$

Đề tuyển sinh Đại Học khối A-2009

PHÂN TÍCH

Bất đẳng thức chỉ chứa: $x+y, y+z$ và $z+x$ nên ta hướng đến việc đổi biến cho gọn bài toán. Đặt $a=x+y; b=y+z, c=z+x$, khi đó điều kiện trở thành: $b^2+ac=a^2+c^2$, bất đẳng thức trở thành: $a^3+c^3+3abc\leq 5b^3$

Ta thấy điều kiện và bài toán đẳng cấp (thuần nhất) nên ta chia qua để giảm biến: $b^2+ac=a^2+c^2 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}\frac{c}{b}=\frac{a}{b^2}^2+\frac{c}{b^2}^2$

$a^3+c^3+3abc\leq 5b^3 \Leftrightarrow \frac{a^3}{b^3}+\frac{c^3}{b^3}+3\frac{a}{b}\frac{c}{b}\leq 5$

Đặt $u=\frac{a}{b}, v=\frac{c}{b}$. Điều kiện $\Leftrightarrow u^2+v^2=uv+1$, bài toán $\Leftrightarrow u^3+v^3+3uv\leq 5$

Ta đã đưa về bài toán 2 biến đối xứng đơn giản. Và ta có thể hiểu bài toán là tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=u^3+v^3+3uv$

BÀI GIẢI

Đặt: $\begin{cases} a=x+y \\ b=y+z \\ c=z+x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{a-b+c}{2}; y=\frac{a+b-c}{2}; z=\frac{b+c-a}{2}$

$$\Rightarrow x(x+y+z)=3yz \Leftrightarrow a^2+c^2=b^2+ac \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\frac{c}{b}+1 \quad (1)$$

Bất đẳng thức trở thành: $a^3+c^3+3abc\leq 5b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{c}{b}\right)^3+3\frac{a}{b}\frac{c}{b}\leq 5$ (2)

Đặt $u=\frac{a}{b}, v=\frac{c}{b} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow u^2+v^2=uv+1$ và $(2) \Leftrightarrow u^3+v^3+3uv\le 5$

Áp dụng AM-GM: $(1) \Rightarrow (u+v)^2=3uv+1\le \frac{3}{4}(u+v)^2+1 \Leftrightarrow u+v\le 2$

Xét $P=u^3+v^3+3uv=(u+v)(u^2-uv+v^2)+(u+v)^2-1=(u+v)^2+(u+v)-1$

$\Rightarrow P\le 2^2+2-1=5 \Rightarrow (2)$ đúng. Đẳng thức xảy ra khi $u=v=1$.

<u>Cách 2:</u> *Ngoài ra ta cũng có thể đánh giá bằng AM-GM như sau:*

Ta có: $b^2=a^2+c^2-ac\ge (a+c)^2-\frac{3}{4}(a+c)^2 \Leftrightarrow 2b\ge a+c$

$\Rightarrow a^3+c^3+3abc=(a+c)(a^2+c^2-ac)+3abc=(a+c)b^2+3abc\le 2b.b^2+\frac{3}{4}(a+c)^2 b$

$\Rightarrow a^3+c^3+3abc\le 2b^3+\frac{3}{4}(2b)^2 b=5b^3$. *Đẳng thức xảy ra khi* $a=b=c$.

Kết luận: Vậy bất đẳng thức đúng, đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Bài 4: *Cho* a,b,c *là các số thực không âm thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối B-2010

PHÂN TÍCH

Bài toán đối xứng ba biến không âm nên đẳng thức xảy ra khi có ít nhất 1 biến bằng 0. Ta cố định một biến $c=0 \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow b=1-a$ thay vào P :

$$P=3\left(a^2(1-a)^2+0+0\right)+3\left(a(1-a)+0+0\right)+2\sqrt{a^2+(1-a)^2+0^2}$$

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với :

$F(X)=3X^2(1-X)^2+3X(1-X)+2\sqrt{X^2+(1-X)^2}$

- START = 0
- END = 1
- STEP = 0.1

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số có cực đại trong khoảng $(0.4, 0.6)$ và đạt giá trị nhỏ nhất là 2 khi $X=0$ và $X=1$.

Khi $X=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow b=1$ và $X=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=0$

X	F(X)
0	2
0.1	2.1053
0.2	2.206
0.3	2.2854
0.4	2.335
0.5	2.3517
0.6	2.335
0.7	2.2854
0.8	2.206
0.9	2.053

1	2

Vậy điểm rơi của bài toán là $a=1,b=c=0$ và các hoán vị.

Ta thấy với điểm rơi trên thì :

$$a^2b^2=b^2c^2=c^2a^2=0\Rightarrow 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\geq\left(ab+bc+ca\right)^2$$

Chính vì vậy ta sẽ ép biến về $t=ab+bc+ca$

Ta không thể đánh giá : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ nên ta sẽ biến đổi tương đương : $a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)$

Và điều kiện của biến : $0\leq ab+bc+ca\leq\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$

BÀI GIẢI

Sử dụng bất đẳng thức : $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(x+y+z\right)^2$

$\Rightarrow 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\geq\left(ab+bc+ca\right)^2$

Mà : $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=1-2\left(ab+bc+ca\right)$

$\Rightarrow P\geq\left(ab+bc+ca\right)^2+3\left(ab+bc+ca\right)+2\sqrt{1-2\left(ab+bc+ca\right)}$

Ta có : $0\leq ab+bc+ca\leq\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=\dfrac{1}{3}$

Đặt $t=ab+bc+ca\Rightarrow t\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\Rightarrow P\geq f\left(t\right)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$

PHÂN TÍCH HÀM SỐ

Sử dụng công cụ TABLE bằng máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=X^2+3X+2\sqrt{1-2X}$$

- START = 0
- END = 0.35
- STEP = 0.05

X	$F\left(X\right)$
0	2
0.05	2.0498
0.1	2.0988
0.15	2.1458
0.2	2.1891
0.25	2.2267
0.3	2.2549
0.35	2.2679

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số đơn điệu tăng trên $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ và hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $X=0$

tại $t=0$. Khi đó giá trị cần tìm của a,b,c là $\begin{cases}ab+bc+ca=0\\a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1,b=c=0$

và các hoán vị, thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nên ta định hướng chứng minh

hàm số $f(t)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$ đồng biến trên $\left[0,\frac{1}{3}\right]$

Xét hàm : $f(t)=t^2+3t+\sqrt{1-2t}$ với $t=ab+bc+ca \Rightarrow t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$

$\Rightarrow f'(t)=2t+3-\frac{1}{\sqrt{1-2t}}>0$ với mọi $t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$

Hàm số đồng biến nên $f(t)\geq f(0)=2 \Rightarrow P\geq 2$

Đẳng thức xảy ra khi $a=1,b=c=0$ và các hoán vị.

Kết luận : Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $a=1,b=c=0$.

Bài 5: *Cho x,y,z là các số thực thuộc $[1,4]$ và $x\geq y, x\geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối A-2011

PHÂN TÍCH

Biểu thức thuần nhất bậc 0 và hai phân thức cuối tương đương nhau nên ta sẽ chia để giảm biến $P=\frac{1}{2+3\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}$ nhưng hai phân thức cuối khá là quen thuộc chúng ta liên hệ đến một bất đẳng thức phụ :

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{1+\sqrt{ab}} \text{ với } ab\geq 1 \quad (1)$$

Ta cần điều kiện để sử dụng bất đẳng thức trên, từ điều kiện $\Rightarrow \frac{z}{y}.\frac{x}{z}=\frac{x}{y}\geq 1$ thỏa mãn, áp dụng (1) đưa bài toán về khảo sát hàm số với biến $t=\sqrt{\frac{x}{y}}$

Ở đây tôi không trình bày cách chứng minh bất đẳng thức phụ trên vì quá quen thuộc, các em tự chứng minh vào bài giải.

BÀI GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức : $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với $ab\geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}} \Rightarrow P\geq\frac{1}{2+3\frac{y}{x}}+\frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Do $x,y\in[1,4], x\ge y\Rightarrow 1\le\frac{x}{y}\le 4$. Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow P\ge f(t)=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$

PHÂN TÍCH HÀM SỐ

Sử dụng công cụ TABLE bằng máy tính CASIO với:

$$F(X)=\frac{X^2}{2X^2+3}+\frac{2}{X+1}$$

- START = 1
- END = 4
- STEP = 0.25

X	F(X)
1	1.2
1.1	1.1756
1.2	1.1539
1.3	1.1344
1.4	1.1165
1.5	1.1
1.6	1.0845
1.7	1.0698
1.8	1.056
1.9	1.0428
2	1.0303

Dựa vào bảng giá trị trên ta nhận thấy hàm số đơn điệu giảm trên $\lfloor 1,2\rfloor$ và giá trị nhỏ nhất đạt tại $X=2$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là $f(2)$

Khi $t=2$ giá trị cần tìm của x,y,z là $\begin{cases}\frac{x}{y}=4\\ \frac{z}{y}=\frac{x}{z}\vee\frac{z}{y}\frac{x}{z}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=4,y=1,z=2$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện của bài toán, như vậy ta định hướng chứng minh hàm số $f(t)=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{1}{t+1}$ đơn điệu giảm khi $t\in\lfloor 1,2\rfloor$

Xét hàm: $f(t)=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$ với $t=\sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow t\in[1,2]$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-4\lfloor t^3(t-1)+t^2(6-t)+9\rfloor}{(2t^2+3)^2(t+1)^2}<0\quad\forall t\in\lfloor 1,2\rfloor$$

Hàm nghịch biến trên $\lfloor 1,2\rfloor\Rightarrow f(t)\ge f(2)=\frac{34}{33}\Rightarrow P\ge\frac{34}{33}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}=2\\ \frac{z}{y}=\frac{x}{z}\vee\frac{z}{y}\frac{x}{z}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=4,y=1,z=2$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$ khi $x=4,y=1,z=2$.

Bài 6: *Cho* x,y,z *là các số thực thỏa mãn* $x+y+z=0$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối A-2012

PHÂN TÍCH

Ta có $x+y+z=0$ nên sẽ có ít nhất 1 biến âm, nhưng bất đẳng thức và điều kiện đối xứng nên điểm rơi khi có ít nhất hai biến bằng nhau. Do vai trò 3 biến như nhau nên ta giả sử $x=y\Rightarrow 2x+z=0\Leftrightarrow z=-2x$ thay vào P được:

$$P=3^{|0|}+3^{|3x|}+3^{|3x|}-\sqrt{6x^2+6x^2+6(-2x)^2}=2.3^{3|x|}-6|x|+1$$

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F(X)=2.3^{3X}-6X+1$$

- START = 0
- END = 4
- STEP = 0.5

X	F(X)
0	3
0.5	8.3923
1	49
1.5	272.59
2	1447
2.5	7561.9
3	39349
3.5	204531
4	1.10^6

Từ bảng giá trị trên ta thấy hàm số đơn điệu tăng và tăng rất nhanh, hàm đạt giá trị nhỏ nhất là 3 khi $X=0$.

Vậy điểm rơi của bài toán là $x=y=z=0$

Bài toán có chứa hàm mũ đối xứng nên ta tìm một đánh giá để đưa về đa thức đảm bảo điểm rơi tại $x=y=z=0$.

Ta có đánh giá: $3^t\ge t+1\ \ \forall t\ge 0\Rightarrow 3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}\ge |x-y|+|y-z|+|z-x|$

Khi đó ta cần tìm kiếm một đánh giá hoặc biến đổi sao cho:

$$6x^2+6y^2+6z^2\le f\left(|x-y|,|y-z|,|z-x|\right)$$

Ta biến đổi tương đương kết hợp điều kiện:

$$6x^2+6y^2+6z^2=2(x-y)^2+2(y-z)^2+2(z-x)^2+2(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+6y^2+6z^2=2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)$$

Ta suy ra $P\ge |x-y|+|y-z|+|z-x|-\sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)}+3$

Nếu ta đặt $a=|x-y|,b=|y-z|c=|z-x|\Rightarrow P\ge a+b+c-\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+3$ thì các đánh giá đưa về hàm số sẽ bị ngược dấu.

Do dự đoán giá trị nhỏ nhất của P là 3 nên ta sẽ đánh giá:

$$|x-y|+|y-z|+|z-x|-\sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)}\geq 0$$

Ta bình phương và sử dụng bất đẳng thức: $|a|+|b|\geq|a+b|$

BÀI GIẢI

Xét hàm số: $f(t)=3^t-t$ với $t\geq 0$

$\Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3-1>0$ với mọi $t\geq 0$

Hàm đồng biến $\Rightarrow f(t)\geq f(0)=1\Leftrightarrow 3^t\geq t+1$

Áp dụng ta được: $3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}\geq|x-y|+|y-z|+|z-x|+3$

Mà: $6x^2+6y^2+6z^2=2(x-y)^2+2(y-z)^2+2(z-x)^2+2(x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow 6x^2+6y^2+6z^2=2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)$

$\Rightarrow P\geq|x-y|+|y-z|+|z-x|-\sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)}+3$

Ta có: $\left(|x-y|+|y-z|+|z-x|\right)^2\geq 2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(|x-y||y-z|+|y-z||z-x|+|z-x||x-y|\right)\geq|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2$

Áp dụng bất đẳng thức : $|a|+|b|\geq|a+b|$

$\Rightarrow|x-y|+|y-z|\geq|x-y+y-z|=|x-z|\Rightarrow|z-x|\left(|x-y|+|y-z|\right)\geq|z-x|^2$

Tương tự: $|x-y|\left(|y-z|+|z-x|\right)\geq|x-y|^2$, $|y-z|\left(|x-y|+|z-x|\right)\geq|y-z|^2$

$\Rightarrow|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)}$

$\Rightarrow P\geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=0$.

Kết luận : Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $x=y=z=0$.

Bài 7: *Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $P=x^5+y^5+z^5$

Đề tuyển sinh Đại Học khối B-2012

PHÂN TÍCH

Bài toán đối xứng và biến thực nên điểm rơi khi có 2 biến bằng nhau, do

vai trò của 3 biến là như nhau ta giả sử $y=z\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\x^2+2y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{cases}$

Thay vào $\Rightarrow P=\pm\dfrac{5\sqrt{6}}{36}$, khả năng điểm rơi của sẽ là $x=\dfrac{2}{\sqrt{6}},y=z=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Để đảm bảo ta sử dụng CASIO như sau: $z=-x-y\Rightarrow x^2+y^2+(x+y)^2=1$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{3y^2}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3y^2}{4}}\Rightarrow z=-\frac{y}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3y^2}{4}}$$

Thay vào: $\Rightarrow P=\left(-\dfrac{y}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y^2}{4}}\right)^5+y^5+\left(-\dfrac{y}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y^2}{4}}\right)^5$

Sử dụng công cụ TABLE bằng máy tính CASIO với:

$$F(X)=\left(-\frac{X}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3X^2}{4}}\right)^5+X^5+\left(-\frac{X}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3X^2}{4}}\right)^5$$

- START = –1
- END = 1
- STEP = 0.1

X	F(X)
–0.8	– 0.28
–0.7	0.0175
–0.6	0.21
–0.5	0.3125
–0.4	0.34
–0.3	0.3075
–0.2	0.23
–0.1	0.1225
0	0
0.1	– 0.122
0.2	– 0.23
0.3	– 0.307
0.4	– 0.34
0.5	– 0.312
0.6	– 0.21
0.7	– 0.017
0.8	0.28

Dựa vào bảng ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại giá trị gần $X=-0.4$ và tại giá trị $X=0.8$ hàm số đột nhiên tăng nhanh nên ta tiếp tục sử dụng TABLE với:

- START = 0.8
- END = 0.82
- STEP =0.001

Ta thu được bảng và thấy hàm số giá trị lớn nhất tại giá trị gần $X=0.816$ và giá trị này vào khoảng 0.3383 gần bằng giá trị tại $X=-0.4$.

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại giá trị gần với $X=-0.4$ và $X=0.816$ phù hớp với dự đoán $x=\dfrac{2}{\sqrt{6}},y=z=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ và giá trị lớn nhất xấp xĩ 0.34 gần đúng với dự đoán $\dfrac{5\sqrt{6}}{36}$.

Ta sẽ nhập vào CASIO một lần nữa để xác nhận chính xác giá trị $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ là cực trị. Nhập $\frac{d}{dx}\left(\left(-\frac{X}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3X^2}{4}}\right)^5+X^5+\left(-\frac{X}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3X^2}{4}}\right)^5\right)\Bigg|_{x=\frac{2}{\sqrt{6}}}=0$ do đạo hàm của hàm số $F(X)$ bằng 0 tại $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ nên $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ là cực trị.

Với dự đoán điểm rơi khi có 2 biến bằng nhau ta sẽ đánh giá đưa về một biến. Với biến số thực thì tốt nhất ta rút thế đi kèm với đánh giá luôn đúng

$$1=x^2+y^2+z^2\geq x^2+\frac{(y+z)^2}{2}=x^2+\frac{(-x)^2}{2}=\frac{3x^2}{2}\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{6}}\leq x\leq \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Cuối cùng ta sẽ đưa P về biến x bằng đánh giá: $16\left(y^5+z^5\right)\leq (y+z)^5=-x^5$

Đánh giá chỉ đúng khi $y+z\leq 0$, khi đó $P\leq x^2-\frac{x^5}{16}=\frac{15}{16}x^5$ rõ ràng khi đó điểm rơi xảy ra khi $x=\frac{2}{\sqrt{6}}>0$. Nên ta sẽ giả sử $x\geq 0\Rightarrow y+z=-x\leq 0$.

BÀI GIẢI

Không mất tổng quát giả sử $x\geq 0\Rightarrow y+z=-x\leq 0$

Ta có: $a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)\geq (a+b)^2\quad \forall a,b\in R$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq x^2+\frac{(y+z)^2}{2}=x^2+\frac{(-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2\Leftrightarrow x^2\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3}\leq x\leq\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ta có đánh giá sau: $16\left(y^5+z^5\right)\leq (y+z)^5$

$$\Leftrightarrow 16(y+z)\left(y^4-y^3z+y^2z^2-yz^3+z^4\right)\leq (y+z)^5$$

$$\Leftrightarrow 16\left(y^4-y^3z+y^2z^2-yz^3+z^4\right)\geq (y+z)^4\qquad \text{Do } y+z\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^4+3z^4+2y^2z^2\geq 4yz\left(y^2+z^2\right)$$

$\Leftrightarrow (y-z)^4+2\left(y^2-z^2\right)^2\geq 0$ luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi $y=z$.

Áp dụng bất đẳng thức $\Rightarrow P\leq x^5+\frac{(y+z)^5}{16}=x^5+\frac{(-x)^5}{16}=\frac{15x^5}{16}\leq\frac{5\sqrt{6}}{36}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{2}{\sqrt{6}},y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ và các hoán vị.

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ khi $x=\frac{2}{\sqrt{6}}, y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 8: *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối A-2013

PHÂN TÍCH

Bài toán và điều kiện đối xứng theo hai biến *a, b* nên điểm rơi khi $a=b$, thay vào điều kiện ta được điểm rơi $a=b=c$.

Điều kiện và bài toán là các biểu thức đẳng cấp nên ta hướng đến đặt ẩn phụ giảm biến.

Đặt $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$. Điều kiện $\Leftrightarrow (x+1)(y+1)=4 \Leftrightarrow x+y+xy=3$

$\Rightarrow P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$. Điểm rơi là $x=y=1$ và $\min P=1-\sqrt{2}$

Ta thấy $-\sqrt{x^2+y^2}=-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$ nên ta có thể đưa về hàm số với biến x^2+y^2 hoặc $x+y$.

Do 2 phân thức đầu có bậc 3 nên ta sẽ nghĩ đến các đánh giá sau:

- Đánh giá 1: Sử dụng bất đẳng thức: $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}$
- Đánh giá 2 : Áp dụng AM-GM:
  $\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ge 6\frac{x}{y+3}$ hoặc $\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{1}{2}\ge 24\frac{x^2}{(y+3)^2}$

Từ điều kiện $\Rightarrow x+y\ge 2$ nên ta sẽ định hướng ép biến về $x+y$ và phải đánh giá đảm bảo hàm số thu được đồng biến.

BÀI GIẢI

Đặt $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$. Điều kiện trở thành: $(x+1)(y+1)=4\Leftrightarrow xy+x+y=3$

$\Rightarrow P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$

Áp dụng AM-GM: $(x+1)(y+1)\le\frac{(x+y+2)^2}{4}\Leftrightarrow 16\le(x+y+2)^2\Leftrightarrow x+y\ge 2$

Cách 1:

Áp dụng bất đẳng thức: $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}\quad\forall a,b\ge 0$

$$\Rightarrow\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3$$

$$\Rightarrow P\ge 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$$

ĐỊNH HƯỚNG TƯ DUY

Ta sẽ đánh giá tiếp tục để đưa bài toán về $x+y$. Do biểu thức có dạng phân thức nên ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}=\frac{x^2}{xy+3x}+\frac{y^2}{xy+3y}\ge\frac{(x+y)^2}{2xy+3x+3y}$$

Mẫu số có xy ta vẫn có thể đánh giá tiếp nhưng khoan, đánh giá quá nhiều sẽ dẫn đến bài toán bị ngược dấu nên ta rút thế $xy=3-(x+y)$

$$\Rightarrow P\ge\frac{8(x+y)^6}{(x+y+6)^3}-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$$

Đến đây ta sử dụng CASIO để đảm bảo rằng bài toán vẫn còn đúng:

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F(X)=\frac{8X^6}{(X+6)^3}-\sqrt{X^2+2X-6}$$

- START = 2
- END = 3
- STEP 0.01

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số đơn điệu tăng, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $X=2$.

Chú ý: Để chắc chắn ta có thể tiếp tục sử dụng TABLE cho khoảng rộng hơn.

X	F(X)
2	-0.414
2.1	-0.324
2.2	-0.154
2.3	0.0988
2.4	0.4439
2.5	0.889
2.6	1.444
2.7	2.1201
2.8	2.9294
2.9	3.8847
3	5

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}=\frac{x^2}{xy+3x}+\frac{y^2}{xy+3y}\geq\frac{(x+y)^2}{2xy+3x+3y}=\frac{(x+y)^2}{x+y+6}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{8(x+y)^6}{(x+y+6)^3}-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$$

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{8t^6}{(t+6)^3}-\sqrt{t^2+2t-6}$ với $t=x+y\Rightarrow t\geq 2$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{24t^5(t+12)}{(t+6)^4}-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$$

PHÂN TÍCH HÀM SỐ

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F(X)=\frac{24X^5(X+12)}{(X+6)^4}$$

- START = 2
- END = 3
- STEP = 0.2

X	F(X)
2	2.625
2.2	3.8847
2.4	5.5272
2.6	7.6109
2.8	10.193
3	13.333

$$F(X)=\frac{X+1}{\sqrt{X^2+2X-6}}$$

- START = 2
- END = 3
- STEP =0.2

X	F(X)
2	2.1213
2.2	1.7777
2.4	1.5921
2.6	1.4746
2.8	1.3931
3	1.3333

Dựa vào 2 bảng trên ta thấy $\dfrac{24t^5(t+12)}{(t+6)^4}>\dfrac{5}{2}>\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$ nên ta sẽ đánh giá thông qua giá trị $\dfrac{5}{2}$.

Ta có: $\dfrac{24t^5(t+12)}{(t+6)^4}>\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 48t^6+384t^5-5(t+6)^4>0$ đúng $\forall t\geq 2$

Và: $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2t+2<5\sqrt{t^2+2t-6}\Leftrightarrow 21t^2+42t-154>0$ đúng $\forall t\geq 2$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{24t^5(t+12)}{(t+6)^4}-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}>0\ \forall t\geq 2$$

Hàm số đồng biến trên $[2,+\infty)$ $\Rightarrow f(t)\geq f(2)=1-\sqrt{2}\Rightarrow P\geq 1-\sqrt{2}$

Cách 2:

Áp dụng AM-GM: $$\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 6\frac{x}{y+3}$$

$$\frac{32y^3}{(x+3)^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 6\frac{y}{x+3}$$

$$\Rightarrow P\geq 6\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}-2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}=\frac{x^2}{xy+3x}+\frac{y^2}{xy+3y}\geq\frac{(x+y)^2}{2xy+3x+3y}=\frac{(x+y)^2}{x+y+6}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{6(x+y)^2}{x+y+6}-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}-2$$

PHÂN TÍCH HÀM SỐ

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F(X)=\frac{6X^2}{X+6}-\sqrt{X^2+2X-6}$$

- START = 2
- END = 3
- STEP 0.01

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số đơn điệu tăng, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $X=2$.

Để chắc chắn ta tiếp tục sử dụng TABLE cho khoảng rộng hơn.

X	F(X)
2	-0.414
.1	-0.348
2.2	-0.258
2.3	-0.148
2.4	-0.021
2.5	0.1204
2.6	0.2749
2.7	0.441
2.8	0.6178
2.9	0.8043
3	1

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{6t^2}{t+6}-\sqrt{t^2+2t-6}$ với $t=x+y\Rightarrow t\geq 2$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{6t(t+12)}{(t+6)^2}-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$$

Ta có: $\dfrac{6t(t+12)}{(t+6)^2} > \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 7t^2 + 84t - 180 > 0$ đúng $\forall t \geq 2$

Và $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}} < \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 21t^2 + 42t - 154 > 0$ đúng $\forall t \geq 2$

$\Rightarrow f'(t) = \dfrac{6t(t+12)}{(t+6)^2} - \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}} > 0 \ \forall t \geq 2$

Hàm số đồng biến trên $[2,+\infty)$ $\Rightarrow f(t) \geq f(2) = 1-\sqrt{2} \Rightarrow P \geq 1-\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1 \Leftrightarrow a=b=c$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1-\sqrt{2}$ khi $a=b=c$.

Bài 9: *Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối B-2013

PHÂN TÍCH

P đối xứng theo *a, b* nên dự đoán điểm rơi khi $a=b$.

Ta không đánh giá : $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ vì chưa chắc $a=b=c$.

Nên ta sẽ đánh giá $(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}$ về $a^2+b^2+c^2$:

$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (a+b)\dfrac{a+b+4c}{2} = \dfrac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2}$

Ta ép về $a^2+b^2+c^2$ nên cần cm $a^2+b^2+2ab+4ac+4bc \leq f(a^2+b^2+c^2)$

Cân bằng hệ số trong AM-GM ta được $a=b=c$ và:

$$\frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2} \leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

BÀI GIẢI

Áp dụng AM-GM:

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (a+b)\frac{a+b+4c}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2}$$

Mà: $2ab \leq a^2+b^2$, $4ac \leq 2(a^2+c^2)$ và $4bc \leq 2(b^2+c^2)$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2} \le 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4} \Rightarrow t>2 \Rightarrow P \le f\left(t\right)=\frac{4}{t}-\frac{9}{2\left(t^2-4\right)}$

ĐỊNH HƯỚNG TƯ DUY

Do bài toán không có điều kiện nên để biểu thức có giá trị lớn nhất thì hàm số phải có cực đại và đạt giá trị lớn nhất tại điểm cực đại.

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=\frac{4}{X}-\frac{9}{2\left(X^2-4\right)}$$

- START = 2
- END = 7
- STEP = 0.5

Dựa bảng giá trị trên ta thấy hàm số đạt cực đại trong khoảng $\left(3.5,4.5\right)$ và đạt giá trị lớn nhất tại đó.

X	F(X)
2.5	− 0.4
3	0.4333
3.5	0.5974
4	0.625
4.5	0.6119
5	0.5857
5.5	0.5558
6	0.526
6.5	0.4977
7	0.4714

Ta xác nhận xem $X=4$ có phải là cực trị hay không? Nhập vào máy tính CASIO ta được: $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{X}-\frac{9}{2\left(X^2-4\right)}\right)\bigg|_{x=4}=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $X=4$. Điểm rơi của bài toán là $a=b=c=2$.

Xét hàm: $f\left(t\right)=\frac{4}{t}-\frac{9}{2\left(t^2-4\right)}$ với $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}>2$

$$\Rightarrow f'\left(t\right)=-\frac{4}{t^2}+\frac{9t}{\left(t^2-4\right)^2} \Rightarrow f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=4$$

BBT:

t	2		4		$+\infty$
f′(t)		+	0	−	
f(t)	$-\infty$	↗	$\frac{5}{8}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) \le f(4) = \frac{5}{8} \Rightarrow P \le \frac{5}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2+4}=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$

Cách 2: *Sau khi định hướng được bài toán và điểm rơi như trên thì ta có thể giải bằng cách ép về biến* $a+b+c$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2+4 \ge \frac{(a+b+c+2)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2+4} \ge \frac{a+b+c+2}{2}$

Và: $(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \le (a+b)\frac{a+b+4c}{2} \le \frac{2(a+b+c)^2}{3}$

$$\Rightarrow P \le \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2} = f(t) = \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}$$

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{8}$ khi $a=b=c=2$.

Bài 10: *Cho* x,y,z *là các số thực không âm thỏa mãn* $x^2+y^2+z^2=2$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{x^2}{x^2+yz+x+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối A-2014

PHÂN TÍCH

Bài toán có điều kiện là một biểu thức đối xứng, P không đối xứng nhưng đối xứng theo 2 biến y,z, do điều kiện các biến không âm nên ta không thể đoán điểm rơi là $y=z$. Ta sẽ xét các trường hợp sau:

TH 1: Cố định $x=0 \Rightarrow y^2+z^2=2 \Rightarrow y=\sqrt{2-z^2}$, thay vào P được:

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{2-z^2}+z}{\sqrt{2-z^2}+z+1} - \frac{1+z\sqrt{2-z^2}}{9}$$

Sử dụng công cụ TABLE với:

$$F(X) = \frac{\sqrt{2-X^2}+X}{\sqrt{2-X^2}+X+1} - \frac{1+X\sqrt{2-X^2}}{9}$$

- START = 0
- END = 1.5
- STEP = 0.2

X	F(X)
0	0.4746
0.2	0.4744
0.4	0.4698
0.6	0.4628
0.8	0.4543
1	0.4444
1.2	0.4304
1.4	0.3837

1.5	ERROR

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số đơn điệu giảm trên $\left[0,\sqrt{2}\right]$. Nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $X=0$ suy ra giá trị lớn nhất trong trường hợp này ≈ 0.4746 khi $x=0, y=\sqrt{2}, z=0$

TH 2: Cố định $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=2 \Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}$ (do bài toán đối xứng theo 2 biến y,z nên ta không cần xét TH $y=0$)

$$\Rightarrow P=\frac{x^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{2-x^2}}{x+\sqrt{2-x^2}+1}-\frac{1}{9}$$

Sử dụng công cụ TABLE vơi :

$$F(X)=\frac{X^2}{X^2+X+1}+\frac{\sqrt{2-X^2}}{X+\sqrt{2-X^2}+1}-\frac{1}{9}$$

- START = 0
- END = 1.5
- STEP = 0.2

X	F(X)
0	0.4746
0.2	0.4596
0.4	0.4835
0.6	0.5171
0.8	0.5443
1	0.5555
1.2	0.5383
1.4	0.4153

Dựa bảng giá trị trên ta thấy hàm số đạt cực đại trong khoảng $(0.8,1.2)$ và hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $X=1$. Ta kiểm tra xem $X=1$ có phải là cực đại hay không. Nhập vào máy tính CASIO ta được: $\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2}{X^2+X+1}+\frac{\sqrt{2-X^2}}{X+\sqrt{2-X^2}+1}-\frac{1}{9}\right)\Bigg|_{x=1}=0$ nên $X=1$ là cực đại.

Giá trị lớn nhất trong trường hợp này là $\frac{5}{9}$ khi $x=1, y=1, z=0$.

Kết hợp hai trường hợp ta thấy điểm rơi của bài toán là $x=1, y=1, z=0$ hoặc $x=1, y=0, z=1$.

ĐỊNH HƯỚNG TƯ DUY

Ta có nhận định : $\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}$ và $\frac{y+z}{x+y+z+1}$ dạng phân số có mẫu đồng nhất về số lượng cũng như hệ số nên ta nghĩ đến việc đánh giá sao cho hai mẫu đồng nhất. Từ điều kiện ta đánh giá được:

$$x^2+(y+z)^2=2+2yz \Rightarrow 2(1+yz)\ge 2x(y+z) \Leftrightarrow 1+yz\ge xy+xz$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+yz+x+1}\le \frac{x^2}{x^2+x+xy+xz}=\frac{x}{x+y+z+1}$$

Và : $x^2+y^2+z^2=2 \Leftrightarrow x^2+(y+z)^2=2+2yz \Rightarrow 2(1+yz)\ge \frac{(x+y+z)^2}{2}$

Đến đây ta đã đưa bài toán về biến $x+y+z$. Từ điều kiện bài toán ta đánh giá được $0<x+y+z\le\sqrt{6}$ nên ta sẽ định hướng chứng minh hàm số đạt cực đại tại $t=x+y+z=2$ trên $\left(0,\sqrt{6}\right]$.

BÀI GIẢI

Áp dụng AM-GM:

$x^2+y^2+z^2=2\Leftrightarrow 2\left(1+yz\right)=x^2+\left(y+z\right)^2\ge 2x\left(y+z\right)\Rightarrow 1+yz\ge x\left(y+z\right)$

Và : $2\left(1+yz\right)=x^2+\left(y+z\right)^2\ge\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{2}\Leftrightarrow 1+yz\ge\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{4}$

$\Rightarrow P\le\dfrac{x^2}{x^2+x+x\left(y+z\right)}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{36}=\dfrac{x+y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{36}$

Lại có: $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(x+y+z\right)^2\Leftrightarrow\left(x+y+z\right)^2\le 6\Leftrightarrow 0<x+y+z\le\sqrt{6}$

Xét hàm số: $f\left(t\right)=\dfrac{t}{t+1}-\dfrac{t^2}{36}$ với $t=x+y+z\Rightarrow t\in\left(0,\sqrt{6}\right]$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{1}{\left(t+1\right)^2}-\dfrac{t}{18}=\dfrac{18-t-2t^2-t^3}{18\left(t+1\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=2$

BBT:

t	0	2	$\sqrt{6}$
f'(t)	+	0	–
f(t)	↗	$\dfrac{5}{9}$	↘

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow f\left(t\right)\le f\left(2\right)=\dfrac{5}{9}\Leftrightarrow P\le\dfrac{5}{9}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1,z=0$ hoặc $x=z=1,y=0$

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{5}{9}$ khi $x=y=1,z=0$.

Bài 11: *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $\left(a+b\right)c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2\left(a+b\right)}$$

Đề tuyển sinh Đại Học khối B-2014

PHÂN TÍCH

Bài toán đối xứng theo 2 biến a,b mà $(a+b)c>0$ nên điểm rơi không thể là $a=b=0$ hoặc $c=0$ được nên điểm rơi khi một trong hai biến a hoặc b bằng 0. Khi đó $P=\sqrt{\frac{a}{c}}+\frac{c}{2a}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}+\frac{c}{2a}\ge\frac{3}{2}$ suy ra điểm rơi của bài toán là $a=c,b=0$ hoặc $a=0,b=c$. Từ điều kiện và P chứa hai căn thức quen thuộc ta nghĩ đến các bất đẳng thức:

- Đánh giá 1: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$
- Đánh giá 2: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2$

Đánh giá 1 cần điều kiện $c=\min\{a,b,c\}$ nên không phù hợp. Đánh giá 2 đối xứng và xảy ra khi $a=b,c=0$ và các hoán vị nên phù hợp. Nhưng vấn đề chính là muốn sử dụng đánh giá 2 thì ta phải chứng minh nó khi đó nếu dùng hàm số thì phải sử dụng đánh giá 1 và phải chứng minh đánh giá 1 bằng Cauchy-Schwarz rất dài và khó. Ta sẽ sử dụng cách chứng minh đánh giá 2 bằng AM-GM rất hay như sau :

$$\sqrt{a}(a+b+c)\ge 2a\sqrt{b+c}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$$

Khi đánh giá bằng AM-GM thì đẳng thức chỉ xảy ra khi $b=0$ nên để đảm bảo đẳng thức xảy ra khi a hoặc b bằng 0 ta nhân thêm cho $\sqrt{a}$. Tương tự : $\sqrt{b}(a+b+c)\ge 2b\sqrt{a+c}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{b}{a+c}}\ge\frac{2b}{a+b+c}$

$\Rightarrow P\ge\frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{c}{2(a+b)}$ đưa bài toán về hàm số theo biến $t=\frac{c}{a+b}>0$

BÀI GIẢI

Áp dụng AM-GM:

$$a+b+c\ge 2\sqrt{a(b+c)}\Leftrightarrow\sqrt{a}(a+b+c)\ge 2a\sqrt{b+c}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$$

Đánh giá tương tự: $\sqrt{\frac{b}{a+c}}\ge\frac{2b}{a+b+c}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{c}{2(a+b)}=\frac{2}{1+\frac{c}{a+b}}+\frac{c}{2(a+b)}$$

Đặt $t=\dfrac{c}{a+b}\Rightarrow t>0\Rightarrow P\ge f\left(t\right)=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t}{2}$

PHÂN TÍCH HÀM SỐ

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=\frac{2X}{X+1}+\frac{X}{2}$$

- START = 0
- END = 5
- STEP 0.5

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số có cực tiểu và đạt giá trị nhỏ nhất tại $X=1$.

Vậy $f\left(t\right)\ge f\left(1\right)$ thỏa mãn yêu cầu nên ta định hướng chứng minh hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=1$

X	F(X)
0	2
0.5	1.5833
1	1.5
1.5	1.55
2	1.6666
2.5	1.8214
3	2
3.5	2.1944
4	2.4
4.5	2.6136
5	2.8333

Xét hàm số: $f\left(t\right)=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t}{2}$ với $t=\dfrac{c}{a+b}\Rightarrow t>0$

$$\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\left(1+t\right)^2}\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=1$$

BBT :

t	0		1		$+\infty$
f′(t)		–	0	+	
f(t)	0	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow f\left(t\right)\ge f\left(1\right)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow P\ge\dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0,b=c$ hoặc $a=c,b=0$.

Cách 2 : Sử dụng đánh giá $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\ge 2$

$$\Rightarrow P\ge 2-\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{c}{2\left(a+b\right)}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}}-1\right)^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}$$

Kết luận: Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$ khi $a=c,b=0$ hoặc $a=0,b=c$.

Bài 12: *Cho* a,b,c *thực thuộc đoạn* $\left[1,3\right]$ *và thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$$

Đề chính thức kì thi THPT Quốc Gia 2015

PHÂN TÍCH

Điều kiện của các biến nằm trong khoảng chặn nên khả năng điểm rơi xảy ra khi có ít nhất một biến nằm ở biên. Do điều kiện và bài toán đối xứng 3 biến nên vai trò a,b,c như nhau, cố định $c=1\Rightarrow a+b=5\Rightarrow b=5-a$ thay vào P được :

$$P=\frac{a^2\left(5-a\right)^2+\left(5-a\right)^2+a^2+12a\left(5-a\right)+72}{a\left(5-a\right)+5}-\frac{1}{2}a\left(5-a\right)$$

Do $a,b,c\in\lfloor 1,3\rfloor$ mà $c=1\Rightarrow a,b\in\lfloor 2,3\rfloor$

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F\left(X\right)=\frac{X^2\left(5-X\right)^2-10X^2+50X+97}{5+5X-X^2}-\frac{5X-X^2}{2}$$

- START = 2
- END = 3
- STEP = 0.1

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số đối xứng và đạt cực tiểu tại $X=2.5$, đạt giá trị lớn nhất là $\frac{160}{11}$ tại $X=2$ và $X=3$.

X	F(X)
2	14.545
2.1	14.537
2.2	14.531
2.3	14.527
2.4	14.525
2.5	14.525
2.6	14.525
2◎7	14.527
2.8	14.531
2.◎	14.537
3	14.545

Với giá trị trên thì điểm rơi của bài toán là $a=3,b=2,c=1$ và các hoán vị. Có 2 giá trị nằm ở biên nên ta không cần xét trường hợp nào nữa.

Do điểm rơi tại biên nên ta sử dụng đánh giá miền giá trị :

$$\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)\geq 0\Leftrightarrow abc+5\geq ab+bc+ca\ \ (1)$$

$$\left(a-3\right)\left(b-3\right)\left(c-3\right)\leq 0\Leftrightarrow abc+27\leq 3\left(ab+bc+ca\right)\ \ (2)$$

Đến đây ta đã thấy định hướng ép về $t=ab+bc+ca$, ta cần đánh giá biểu thức đầu đưa về $ab+bc+ca$ nữa là xong. Do điểm rơi là $a=1,b=2,c=3$ nên không thể đánh giá: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)^2$, nhưng ta có:

$$\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc$$

Ta đánh giá điều kiện của biến : $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=12$ nhưng điểm rơi không xảy ra khi ba biến bằng nhau nên điều kiện trên là chưa đủ, từ (1) và (2) $\Rightarrow ab+bc+ca-5\le abc\le 3(ab+bc+ca)-27\Rightarrow ab+bc+ca\ge 11$

Do $a,b,c\in\lfloor 1,3\rfloor$ nên ta có:

$$(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0\Leftrightarrow abc+5\ge ab+bc+ca \qquad (1)$$

$$(a-3)(b-3)(c-3)\le 0\Leftrightarrow abc+27\le 3(ab+bc+ca) \qquad (2)$$

Lấy $(2)-(1)\Rightarrow ab+bc+ca\ge 11$

Mà : $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=12$

Ta có: $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc$

$$\Rightarrow P\le\frac{(ab+bc+ca)^2+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}\left[ab+bc+ca-5\right]=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{72}{ab+bc+ca}+\frac{5}{2}$$

Đặt $t=ab+bc+ca\Rightarrow t\in[11,12]\Rightarrow P\le f(t)=\frac{t}{2}+\frac{72}{t}+\frac{5}{2}$

PHÂN TÍCH HÀM SỐ

Sử dụng công cụ TABLE của máy tính CASIO với:

$$F(X)=\frac{X}{2}+\frac{72}{X}+\frac{5}{2}$$

- START = 11
- END = 12
- STEP 0.1

Dựa vào bảng giá trị trên ta thấy hàm số đơn điệu giảm trên $\lfloor 11,12\rfloor$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $X=11$ thỏa mãn yêu cầu nên ta định hướng chứng minh hàm số nghịch biến trên $\lfloor 11,12\rfloor$.

X	F(X)
11	14.545
11.1	14.536
11.2	14.528
11.3	14.521
11.4	14.515
11.5	14.51
11.6	14.506
11.7	14.503
11.8	14.501
11.9	14.5
12	14.5

Xét hàm: $f(t)=\frac{1}{2}t+\frac{72}{t}+\frac{5}{2}$ với $t=ab+bc+ca\Rightarrow t\in\lfloor 11,12\rfloor$

$\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{72}{t^2}<0\ \ \forall t\in\lfloor 11,12\rfloor$ Hàm số nghịch biến trên $\lfloor 11,12\rfloor$

$\Rightarrow f(t)\le f(11)=\frac{160}{11}\Rightarrow P\le\frac{160}{11}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=1, b=2, c=3$ và các hoán vị.

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{160}{11}$ khi $a=1, b=2, c=3$.

Bài 12: *Xét các số thực* x,y *thỏa mãn* $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$ *(*)*

a.Tìm giá trị lớn nhất của $x+y$

b.Tìm m để $3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\le m$ *đúng với mọi x,y thỏa mãn (*).*

Đề chính thức kì thi THPT Quốc Gia 2016

BÀI GIẢI

a.Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge -3 \end{cases} \Rightarrow x+y\ge -1$

Áp dụng AM-GM: $2\sqrt{x-2}+2\sqrt{y+3}\le \frac{x-2+4}{2}+\frac{y+3+4}{2}=\frac{x+y+9}{2}$

$\Rightarrow x+y+1\le \frac{x+y+9}{2} \Leftrightarrow x+y\le 7$

Giá trị lớn nhất của $x+y$ là 7 khi $\begin{cases} x-2=4 \\ y+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

b. $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y+1)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)\ge 4(x+y+1)$

$\Rightarrow (x+y+1)(x+y-3)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x+y\ge 3 \end{array}\right.$

Xét $P=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)$

TH: $x+y=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow P=-\frac{9476}{243}$

TH: $x+y\ge 3$. Ta có: $x^2+4+y^2+1\ge 4x+2y\ge 2(x+y+2)\ge 10 \Rightarrow x^2+y^2\ge 5$

$\Rightarrow P\le 3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-15$

Đặt $t=x+y \Rightarrow 3\le t\le 7$. $\Rightarrow P\le f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-15$

Xét hàm $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-15 \Rightarrow f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2$

$f''(t)=3^{t-4}\ln^2 3+\left(t.\ln^2 2+\ln^2 2-2\ln 2\right)2^{7-t}>0 \quad \forall t\in\lfloor 3,7\rfloor$

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $\lfloor 3,7\rfloor$.

Ta có: $f(3).f(7)<0 \Rightarrow \exists! a\in\lfloor 3,7\rfloor$ thỏa mãn $f(a)=0$.

Do $f''(a)>0 \Rightarrow t=a$ là cực tiểu.

BBT:

t	3		a		7
$f'(t)$		--	0	+	
$f(t)$	$\frac{148}{3}$		$f(a)$		20

Dựa vào BBT $\Rightarrow f(t)\le f(3)=\dfrac{148}{3} \Rightarrow P\le \dfrac{148}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=3 \\ \sqrt{x-2}\sqrt{y+3}=0 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=1$.

Kết hợp 2 TH $\Rightarrow$ GTLN của P là $\dfrac{148}{3}$ khi $x=2, y=1$

<u>Kết luận :</u> Để $3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3(x^2+y^2)\le m$ đúng $\forall x,y$ thỏa (*) thì:

$$m\ge \max P \Leftrightarrow m\ge \frac{148}{3}.$$

THẦY THƯỜNG XUYÊN ĐĂNG BÀI VỀ CÁC CÂU 8 – 9 – 10 .CÁC EM CÓ THỂ THEO DÕI CÁC BÀI TOÁN OXY VÀ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRỰC TIẾP TẠI FACEBOOK CỦA THẦY.

Facebook: https://www.facebook.com/ThayNguyenDaiDuong

Để khuyến khích tinh thần học tập của các em thì thầy có phần thưởng sau:

Phần thưởng dành cho học sinh online có lời giải chính xác và nhanh nhất là 1 cuốn sách: " Phương Pháp Hàm Số Tư Duy Giải Toán Bất Đẳng Thức – Giá Trị Lớn Nhất – Giá Trị Nhỏ Nhất " tác giả Nguyễn Đại Dương – Đoàn Trí Dũng.
Hoặc 1 cuốn sách: " Chinh Phục Phương Trình – Hệ Phương Trình – Bất Phương Trình " tác giả Nguyễn Tiến Chinh – Nguyễn Phú Khánh.